Η τεκμηρίωση του ορισμού της σύγκλισης ακολουθίας πραγματικών $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ με αντιπροσωπευτικά παραδείγματα & αντιπαραδείγματα.

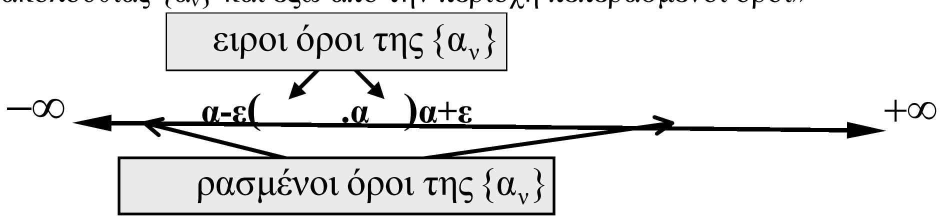
Ιωάννης Π. Πλατάρος , Μαθηματικός , Καπετάν Κρόμπα 37 , Τ.Κ. 24 200 ΜΕΣΣΗΝΗ , ηλ./ταχ. Plataros@sch.gr

Περίληψη: *Οι ακολουθίες που συγκλίνουν στον $\alpha\in\mathbb{R}$, μπορούν να διαχωριστούν σε κλάσεις ξένες μεταξύ τους με βάση τον τρόπο σύγκλισης. Όμως, μόνο ένας αντιπρόσωπος, μιας μόνο κλάσης δικαιολογεί πλήρως την γνωστή συνθήκη σύγκλισης $|\alpha_\nu-\alpha|<\varepsilon$, ενώ όλοι οι άλλοι, δικαιολογούν μια ασθενέστερη συνθήκη. Η ιδιότητα αυτή, καθιστά έναν τέτοιο αντιπρόσωπο απαραίτητο σε κάθε διδακτικό εγχειρίδιο Απειροστικού λογισμού. Επίσης , η παράθεση στα βιβλία ενός τουλάχιστον αντιπροσώπου από κάθε κλάση παραδειγμάτων σύγκλισης , αλλά και αντιπαραδειγμάτων σύγκλισης, εξασφαλίζει την σφαιρική παρουσίαση του ορισμού σε όλο το πλάτος και βάθος της έννοιας της σύγκλισης και αυξάνει την δυνατότητα πλήρους κατανόησης της βασικότερης έννοιας του Απειροστικού.*

Εισαγωγή: Σε μια τυπική εισαγωγή στην έννοια της σύγκλισης ακολουθίας σε πραγματικό, συνήθως παρατίθεται ο κλασσικός ορισμός :

Μία ακολουθία πραγματικών $\{\alpha_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ λέμε ότι συγκλίνει στον $\alpha\in\mathbb{R}$, και συμβολίζουμε με $\alpha_\nu\to\alpha$ ή $\lim\limits_{\nu\to\infty}\alpha_\nu=\alpha$ όταν και μόνον όταν $\forall\ \varepsilon>0\ ,\ \exists\ \nu_0\in\mathbb{N}\ \mu\varepsilon\ \ \nu_0=\nu_0(\varepsilon)\ :\ |\alpha_\nu-\alpha|<\varepsilon\ ,\ \ \forall\ \nu\geq\nu_0$.

Φυσικά, για να αρχίσει να γίνεται κατανοητός ο ορισμός, η γεωμετρική του μετάφραση είναι η εκ των ων ουκ άνευ προϋπόθεση [1]: «$\alpha_\nu\to\alpha\in\mathbb{R}$» $\Leftrightarrow$ «Σε κάθε περιοχή του α περιέχονται άπειροι όροι της ακολουθίας {αν} και έξω από την περιοχή πεπερασμένοι όροι»



Στην συνέχεια, παρατίθενται συνήθως παραδείγματα που ικανοποιούν τον ορισμό και κάπου εκεί τελειώνει η διδασκαλία της ενότητας «σύγκλιση ακολουθίας σε πραγματικό αριθμό» Όμως, τα παραδείγματα και τα αντιπαραδείγματα που θα παρατεθούν, καλό θα είναι να φροντίσουμε να είναι **ένα τουλάχιστον από κάθε κλάση** ,οι οποίες μπορούν να ορισθούν με βάση την φυσική έννοια της κατεύθυνσης σύγκλισης (από δεξιά , αριστερά ή αμφίπλευρα)

Οι κλάσεις ακολουθιών:

Οι κλάσεις που υπάρχουν με βάση τον κριτήριο «κατεύθυνση σύγκλισης» που θέσαμε , είναι οι παρακάτω [2] :

Συγκλίνουσες Ακολουθίες πραγματικών αριθμών στον α $\in \mathbb{R}$				
Κλάση	**Πλήθος όρων <α**	**Πλήθος όρων=α**	**Πλήθος όρων>α**	**Εκπλήρωση ασθενέστερης συνθήκης από την | α$_\nu$-α | <ε , $\forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$**
[Π_1]	πεπ/νο	πεπ/νο	πεπ/νο	Δεν τις εξετάζει ο Απ/κός Λογισμός
[Π_2]	∞	πεπ/νο	πεπ/νο	$0 < \alpha - \alpha_\nu < \varepsilon \ , \forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$
[Π_3]	πεπ/νο	∞	πεπ/νο	$0 = \alpha - \alpha_\nu < \varepsilon \ , \forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$
[Π_4]	πεπ/νο	πεπ/νο	∞	$0 < \alpha_\nu - \alpha < \varepsilon \ , \forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$
[Π_5]	∞	∞	πεπ/νο	$0 \leq \alpha - \alpha_\nu < \varepsilon \ , \forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$
[Π_6]	∞	πεπ/νο	∞	$0 < \lvert \alpha_\nu - \alpha \rvert < \varepsilon \ , \forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$
[Π_7]	πεπ/νο	∞	∞	$0 \leq \alpha_\nu - \alpha < \varepsilon \ , \forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$
[Π_8]	∞	∞	∞	$\lvert \alpha_\nu - \alpha \rvert < \varepsilon \ , \forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$

Από τον πίνακα μπορούμε να παρατηρήσουμε ή και να αποδείξουμε τα εξής:

i. Οι κλάσεις Π_2-Π_8 είναι ξένες μεταξύ τους και κάθε μία έχει άπειρους αντιπροσώπους.
ii. Όλες , πλην της τελευταίας, πληρούν ασθενέστερη συνθήκη από την $\lvert \alpha_\nu - \alpha \rvert < \varepsilon \ , \forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$ που απαιτεί ο ορισμός της σύγκλισης.
iii. Κάθε παράδειγμα συγκλίνουσας ακολουθίας στον α $\in \mathbb{R}$ είναι αντιπρόσωπος μίας και μόνον από αυτές τις κλάσεις.

iv. Αν ανατρέξουμε στην προσωπική μας εμπειρία, μπορούμε να διαπιστώσουμε, ότι τα εμφανιζόμενα παραδείγματα στα εγχειρίδια Απειροστικού Λογισμού, κατά σειρά φθίνουσας συχνότητας εμφάνισης , ακολουθούν **περίπου** την διάταξη του πίνακα από Π_2-Π_8 .

Το βέβαιον είναι ότι αντιπρόσωπος της κλάσης Π_8 απαντάται σπανιότατα έως καθόλου. Όμως, **μόνο ένας αντιπρόσωπος της κλάσης Π_8 μπορεί να δικαιολογήσει πλήρως τον ορισμό της σύγκλισης**, αφού οι αντιπρόσωποι όλων των άλλων κλάσεων, πληρούν ασθενέστερη συνθήκη . Το δε σύνολο όλων των παραδειγμάτων πλην της Π_8, πληροί μια **διάζευξη** των ασθενεστέρων συνθηκών , **που κι αυτή είναι μια ασθενέστερη συνθήκη από την** $|\alpha_\nu - \alpha| < \varepsilon$ **,** $\forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$**.**

Επίσης η παράθεση **αντιπαραδειγμάτων** σύγκλισης, θεωρείται ως εξαιρετικά αναγκαία πράξη, αφού από τα συνήθη παραδείγματα, υπάρχει ο γνωστός κίνδυνος να θεωρήσει ο μαθητής ότι υπάρχουν μόνο συγκλίνουσες ακολουθίες σε $\alpha \in \mathbb{R}$ και το πολύ κάποιες που συγκλίνουν στο $-\infty$ $+\infty$ ή $-\infty$. Όμως ολόκληρη η εικόνα είναι η παρακάτω:

ΜΗ Συγκλίνουσες Ακολουθίες πραγματικών αριθμών.		
Κλάση		**Πλήθος οριακών αριθμών**
$[A_1]$	$[A_1^1]$	Πεπερασμένο ≥ 2 και όλοι πραγματικοί
	$[A_1^2]$	Άπειρο και όλοι πραγματικοί
$[A_2]$		Μοναδικός το $+\infty$
$[A_3]$		Μοναδικός, το $-\infty$
$[A_4]$		Τουλάχιστον δύο , με ένα το $+\infty$ είτε το $-\infty$

Πάλι επικαλούμενοι την κοινή εμπειρία , μπορούμε να παρατηρήσουμε , ότι οι κλάσεις A_1 και A_4 είναι οι πλέον σπάνιες σε εμφάνιση στα βιβλία. Έτσι η ανάγκη πληρότητας των παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων σύγκλισης φαίνεται και εδώ. Στην συνέχεια παραθέτουμε χαρακτηριστικούς αντιπροσώπους, από όλες τις κλάσεις σύγκλισης και μη σύγκλισης:

Παραδείγματα συγκλινουσών ακολουθιών στον α $\in \mathbb{R}$:

- $\alpha_\nu = -\frac{1}{\nu} + a \to a$ Όλοι οι όροι της (τελικά) είναι αριστερά του α (Αντιπρόσωπος της κλάσης [Π_2])])
- $\alpha_\nu = \begin{cases} \beta \neq a \ , \ \alpha\nu \ \ \nu \leq 10^{100} \\ a \ , \alpha\nu \ \ \nu > 10^{100} \end{cases}$ Οι όροι της (τελικά) είναι α. (Αντιπρόσωπος της κλάσης [Π_3]
- $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu} + \alpha \to \alpha$ Όλοι οι όροι της (τελικά) είναι δεξιά του α (Αντιπρόσωπος της κλάσης [Π_4])
- $\alpha_\nu = \begin{cases} -\frac{1}{\nu} + \alpha \, , \, \alpha\nu \ \nu = 2\kappa \\ \alpha \quad , \alpha\nu \ \nu = 2\kappa + 1 \end{cases}$ (Αντιπρόσωπος της κλάσης [Π_5])
- $\alpha_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu} + \alpha \to \alpha$ Οι όροι της (τελικά) είναι εκατέρωθεν του α (Αντιπρόσωπος της κλάσης [Π_6])
- $\alpha_\nu = \begin{cases} \frac{1}{\nu} + \alpha \ , \alpha\nu \ \nu = 2\kappa \\ \alpha \quad , \alpha\nu \ \nu = 2\kappa + 1 \end{cases}$ (Αντιπρόσωπος της κλάσης [Π_7])
- $\alpha_\nu = \begin{cases} \frac{1}{\nu} + \alpha \, , \, \alpha\nu \ \nu = 3\kappa \\ \alpha \quad , \alpha\nu \ \nu = 3\kappa + 1 \\ -\frac{1}{\nu} + \alpha \ , \ \alpha\nu \ \nu = 3\kappa + 2 \end{cases}$ (Αντιπρόσωπος της κλάσης [Π_8])

Αντιπαραδείγματα συγκλινουσών ακολουθιών στον α $\in \mathbb{R}$

- $\alpha_n = \alpha + \beta(-1)^n$ για $\beta \neq 0$ έχει δύο οριακούς αριθμούς, τον α+β και τον α-β (Αντιπρόσωπος της κλάσης [A_1] υποκλάση [A^1_1])
- $\alpha_\nu = \nu \to +\infty$ (Αντιπρόσωπος της κλάσης [A_2])
- $\alpha_\nu = -\nu \to -\infty$ (Αντιπρόσωπος της κλάσης [A_3])

- $\alpha_n = \begin{cases} n, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ \text{α}, & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$ έχει δύο οριακούς αριθμούς , τον α και το $+\infty$ (Αντιπρόσωπος της κλάσης [A_4])
- $\alpha_n = \begin{cases} p - \dfrac{1}{p^{\kappa}}, \text{αν } & n = p^{\kappa}, p = \text{πρώτος} \\ 0, \qquad \text{αν } & n \neq p^{\kappa}, p = \text{πρώτος} \end{cases}$ έχει ως άπειρους οριακούς αριθμούς κάθε πρώτο και το 0 . (Οι πρώτοι είναι άπειροι στο πλήθος από σχετική πρόταση του Ευκλείδη , ενώ $p^k \neq q^{\lambda}$ για p, q ,πρώτους , και κ, λ φυσικούς , λόγω του μοναδικού αναπτύγματος ενός αριθμού σε γινόμενο πρώτων.) (Αντιπρόσωπος της κλάσης [A_1] υποκλάση [A^2_1])

Έτσι, εν κατακλείδι, μπορούμε να συνοψίσουμε τα εξής:

Όταν ο διδάσκων εισάγει μια έννοια , πρέπει να γνωρίζει τις συνήθεις παρανοήσεις και τα συνήθη λάθη των μαθητών. Ένα σημαντικό μέρος από αυτά τα λάθη προέρχονται από λανθασμένες νοηματικές αναπαραστάσεις που προκαλούνται εν τω γεννάσθαι και εν τω γίγνεσθαι της οικοδόμησης μιας νέας έννοιας , από λανθασμένα μοντέλα, τα οποία με την σειρά τους προκαλούνται και από ελλιπή **(:=όχι όλων των κλάσεων)** παραδείγματα και αντιπαραδείγματα. Τα λανθασμένα νοητικά υποδείγματα θα επιμένουν έως ότου προκληθεί ισχυρή διδακτική ρήξη , ώστε να τροποποιηθούν. Μια τέτοια πιθανότητα ρήξης μάλλον μειώνεται με την ηλικία, καθώς η διδασκαλία στα Πανεπιστήμια της έννοιας της σύγκλισης είναι εκ των πραγμάτων ευσύνοπτη. Η πρόληψη λοιπόν είναι καλύτερη λύση και αυτή θα γίνει με την πληρότητα των παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων σύγκλισης.

Το τρέχον αναλυτικό πρόγραμμα δεν προτάσσει την έννοια της σύγκλισης ακολουθίας, αλλά την θεωρεί ως ειδική περίπτωση συνάρτησης . Παρ όλα αυτά , ο ακολουθιακός ορισμός της σύγκλισης συνάρτησης και της συνέχειας, ο ακολουθιακός ορισμός της παραγώγου συνάρτησης, η ίδια η σύγκλιση ακολουθίας που καλύπτει και την έννοια της σύγκλισης απειροσειρών , η ομοιόμορφη σύγκλιση συναρτήσεων κ.ά. δείχνουν την δεσπόζουσα θέση της έννοιας στην διδακτική θεμελίωση του Απειροστικού Λογισμού , με επαγωγικό τρόπο , από το μερικότερο στο συνθετότερο.

Στο παλιότερο αναλυτικό πρόγραμμα του Λυκείου η σύγκλιση της ακολουθίας είχε βασική εισαγωγική σημασία , κάτι που μπορεί να γίνει και

στο άμεσο μέλλον, καθώς και -ανάμεσα στα άλλα- να συμβάλλει στην ομαλότερη εισαγωγή, από την Ανάλυση του Λυκείου , στην Ανάλυση του πρώτου έτους σπουδών των ΑΕΙ-ΤΕΙ._

Αναφορές: [1] **Γιαννακούλιας Ευστάθιος**: *«Διδακτική του Απειροστικού Λογισμού»* Σημειώσεις παραδόσεων μεταπτυχιακού. μαθήματος Παν. Αθηνών , Αθήνα 2002

[2] **Πλατάρος Ιωάννης** : *«Η διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού μέσω αντιπαραδειγμάτων»* Διπλωματική εργασία στο ΜΔΕ «Διδακτική & Μεθοδολογία των Μαθηματικών» του Μαθ. Τμήματος Παν. Αθηνών. Αθήνα 2004